CORRIGÉ 65 page 195

① *a)* Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda \neq \mu$.
$(M - \lambda I_n)(M - \mu I_n) = M^2 - \mu M - \lambda M + \lambda\mu I_n$
Puis en remplaçant M et M^2 par leurs expressions données dans l'énoncé:
$(M - \lambda I_n)(M - \mu I_n) = \lambda^2 A + \mu^2 B - \mu(\lambda A + \mu B) - \lambda(\lambda A + \mu B) + \lambda\mu I_n$
$(M - \lambda I_n)(M - \mu I_n) = \lambda^2 A + \mu^2 B - \lambda\mu A - \mu^2 B - \lambda^2 A - \lambda\mu B + \lambda\mu I_n = 0_n$
En échangeant les valeurs de λ et μ on obtient:
$(M - \mu I_n)(M - \lambda I_n) = 0_n$

b) En remplaçant M et M^2 par leurs expressions données dans l'énoncé, on a :
$(M - \lambda I_n)(M - \mu I_n) = (\lambda(A - I_n) + \mu B)\,(\lambda A + \mu(B - I_n))$
Puis en utilisant $A + B = I_n$, on a:
$(M - \lambda I_n)(M - \mu I_n) = (-\lambda B + \mu B)\,(\lambda A - \mu(A) = (\lambda - \mu)(-B)(\lambda - \mu)A = -(\lambda - \mu)^2 BA$
Or $(M - \lambda I_n)(M - \mu I_n) = 0_n$, donc $BA = 0_n$
En échangeant les valeurs de λ et μ, on a $AB = 0_n$
Enfin, $A^2 = (I - B)^2 = I^2 - B - B + B^2 = I - B - B(I - B) = A - BA = A$ car $BA = 0_n$
On a de même $B^2 = B$

② Soit $P(p)$:« $M^p >= \lambda^p A + \mu^p B$

Initialisation: $\lambda^0 A + \mu^0 B = A + B = I_n$ et $M^0 = I_n$

Hérédité: Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $P(p)$ vrai.

$M^{p+1} = M \times M^p = M(\lambda^p A + \mu^p B)$ par hypothèse de récurrence.

En remplaçant M par son expression :

$M^{p+1} = (\lambda A + \mu B)(\lambda^p A + \mu^p B) = \lambda^{p+1} A^2 + \lambda\mu^p AB + \lambda^p \mu BA + \mu^{p+1} B^2)$

puis en utilisant $A^2 = A$, $B^2 = B$ et $AB = BA = 0_n$:

$M^{p+1} = \lambda^{p+1} A + \mu^{p+1} B$

Conclusion: $P(p)$ est vrai pour $p = 0$ et est héréditaire, donc est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$

③ Il faut impérativement dire qu'on a bien vérifié que $A + B = I_2$, sinon les résultats de la première partie sont inapplicables.

On trouve facilement $M = 2A - B$ et $M^2 = 4A + B$

④ Toutes les hypothèses de la première partie ayant été vérifiées, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$M^p = 4^p A + (-1)^p B$